Tiefpass 2. Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung

Abbildung 1 zeigt eine mögliche Schaltung, um einen Tiefpass 2. Ordnung mit Hilfe von Mehrfachgegenkopplung zu realisieren. Für die Übertragungs-

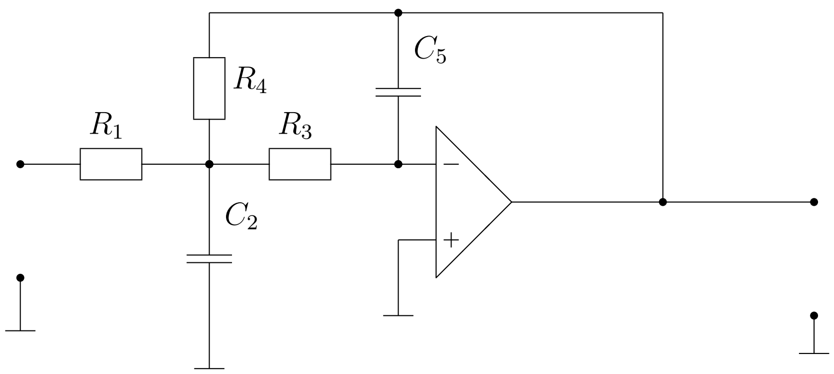

Abbildung 1: Tiefpass 2. Ordnung

funktion dieser Schaltung erhält man:

$$\underline{v}(j\omega) = -\frac{\dfrac{R_4}{R_1}}{1 + j\omega\dfrac{C_5(G_1 + G_3 + G_4)}{G_4 + G_3} - \omega^2 C_5 C_2 R_3 R_4} \tag{1}$$

Die folgende Gleichung gibt die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 2. Ordnung in normierter Form wieder:

$$\underline{v}(j\omega) = -\frac{v_0}{1 + j2\tan(\delta)\dfrac{\omega}{\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{2}$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen beiden Gleichungen liefert:

$$v_0 = \frac{R_4}{R_1} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_2 C_5 R_3 R_4}} \quad \tan(\delta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_5}{C_2}}\left\{(v_0 + 1)\sqrt{\frac{R_3}{R_4}} + \sqrt{\frac{R_4}{R_3}}\right\}$$

Die Dimensionierungsaufgabe eines Ingenieurs besteht darin, bei Vorgabe der Parameter v_0, $\tan(\delta)$ und ω_0 der Übertragungsfunktion die Bauelemente der Schaltung zu berechnen. Da nur die genannten drei Parameter frei wählbar sind, die Beschaltung jedoch aus fünf unabhängigen Bauelementen besteht, müssen zu ihrer eindeutigen Bestimmung zusätzliche Bedingungen eingeführt werden. Zunächst ist es sinnvoll, die Kapazität C_5 fest vorzugeben und die Kapazität C_2 auf sie zurückzuführen. Es soll gelten $C_2 = k \cdot C_5$. Hieraus erhält man die folgende Gleichung:

$$\sqrt{\frac{R_4}{R_3}} = C_5 \sqrt{k} R_4$$

Mit Hilfe der Gleichung für $\tan(\delta)$ kann eine Bestimmungsgleichung für den Widerstand R_4 abgeleitet werden:

$$R_4 = \frac{\tan(\delta)}{\omega_0 C_5} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v_0 + 1}{k \tan(\delta)}} \right) \tag{3}$$

Damit der Wurzelausdruck reell bleibt, folgt als weitere Nebenbedingung:

$$k \geq \frac{v_0 + 1}{\tan(\delta)}$$

Die weiteren Widerstände lassen sich durch die folgenden Beziehungen ermitteln:

$$R_3 = \frac{1}{k \left(\omega_0 C_5\right)^2 R_4} \qquad R_1 = \frac{R_4}{v_0}$$

Beispiel: Es soll ein Tiefpassfilter mit $f_0 = 3,5\text{kHz}$, $\tan(\delta)$ =0,707 und v_0 =10 realisiert werden.
Für den Proportionalitätsfaktor k folgt hieraus:

$$k \geq \frac{11}{0,707} = 15,6$$

An Gleichung 3 erkennt man, dass der Widerstand R_4 und die Reaktanz der Kapazität C_5 bei der Grenzfrequenz die gleiche Größenordnung besitzen. Wählt man den Wert von C_5 zu 4nF und den Faktor k zu 20 ($C_2 = 80\text{nF}$), so erhält man für R_4:

$$R_4 = \frac{0,707}{2\pi\, 3,5\, 10^3\, 4\, 10^{-9}} \Omega \left(1 + \sqrt{1 - \frac{11}{20\, 0,707}} \right) = 11,8\text{k}\Omega$$

Damit bestimmen sich die Widerstände R_3 und R_1 zu:

$$R_3 = \frac{1}{20\,(2\pi\, 3,5\, 10^3\, 4\, 10^{-9})^2\, 11,8\, 10^3} \Omega = 546\Omega$$

$$R_1 = \frac{11,8}{10} \text{k}\Omega = 1,18\text{k}\Omega$$